

Тема 16. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка.

§1. Основные понятия дифференциальных уравнений

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы различных порядков называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение. Например, уравнение $y' \sin x + y \cos x = 1$ - **первого порядка**; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x$ - **второго порядка**; $y''' = xy$ - **третьего порядка и т.д.**

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция $y=y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. График решения на плоскости xOy называется **интегральной кривой уравнения**.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$, то оно обычно называется интегралом уравнения.

Задача Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (1)$$

ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (I) требуется найти решение $y=y(x)$, для которого функция $y(x)$ вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно принимает заданные значения $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$, при заданном значении x_0 аргумента x , т.е.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (2)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$ - заданные числа.

Условия (2) называются начальными условиями решения $y=y(x)$, а само это решение - частным решением уравнения (I), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Общее решение уравнения (I) - это решение вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящее от произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любой системе начальных условий.

Частное решение уравнения (I) может быть получено из общего решения при некоторых числовых значениях произвольных постоянных

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

§2. Геометрический смысл общего и частного решения дифференциального уравнения

Геометрически общее решение представляет множество интегральных кривых на плоскости $ХО Y$, а частное решение - какую-либо конкретную кривую, выделенную из этого множества при заданных начальных условиях.

Пример. Для дифференциального уравнения $xy' - y = 0$, $y = cx$ общее решение - это семейство прямых проходящих через начало координат (рис.1)

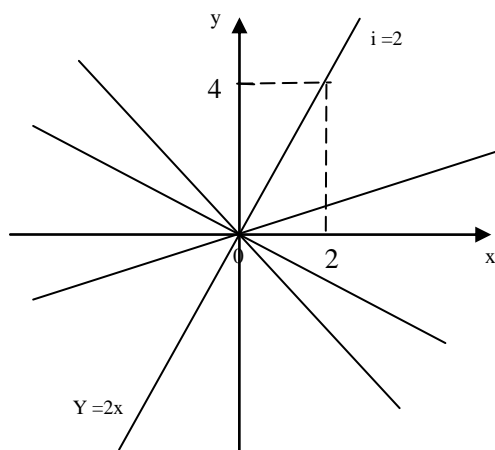


рис. 1

Если взять $x=2, y=4$, т.е точку (2,4) то можно найти

уравнение конкретной прямой из множества ,
проходящей через заданную точку.

Рассмотрим систему:
$$\begin{cases} y = cx \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$4=2c, c=2$$

Подставив $c=2$ в выражение $y=cx$, получим $y=2x$ частное решение уравнения - уравнение прямой, проходящей через точку (2,4)

Пример. $yy'+x=0, x^2 + y^2 = c^2$

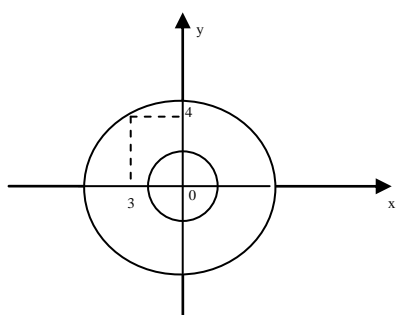


Рис.2

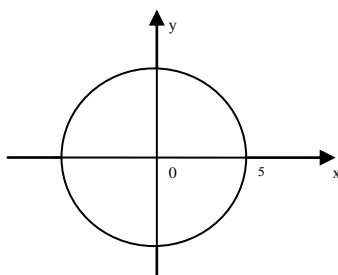


Рис. 3

Общее решение это множество окружностей,
с центром в начале координат и имеющих
радиус, равный c (рис.2)

Если взять $x=3$, $y=4$ до получим $9+16=c^2$,
 $c^2=25$, $c=5$ и уравнение окружности проходящей
через точку (3,4) запишется $x^2+y^2=25$ - это
частное решение заданного д.у.

Замечание. Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие решения, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных. Такие решения называют особыми. Например, проверкой можно убедиться, что уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет общее решение $y = \sin(x + C)$, в то же время $y = 1$ тоже является решением этого уравнения, но это решение не может быть получено из общего решения ни при каких C . $y = 1$ - особое решение. Графиком особого решения является интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых общего решения. Такая кривая называется огибающей семейства интегральных кривых.

§3. Дифференциальные уравнения I порядка

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y)$$

где y - неизвестная функция; x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x, C) = 0$ или $\Phi(x, y, c) = 0$ - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x) = y_0$, надо найти соответствующее значение $C = C_0$, подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y = \varphi(x, C_0)$ или $\Phi(x, y, c) = 0$

3.1. Уравнения с разделёнными переменными

Определение. Простейшими уравнениями 1-го порядка называется уравнения вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, т.е. уравнения с разделёнными переменными. Например:

$$a) x^3 dx + e^y dy = 0$$

$$б) \sin x dx + \sqrt{y} dy = 0$$

Общее решение таких уравнений находится непосредственным интегрированием данного уравнения: а) $x^3 dx + e^y dy = 0$

$$\int x^3 dx + \int e^y dy = \int 0$$

$$\int x^3 dx + \int e^y dy = c$$

$$\frac{x^4}{4} + e^y = c$$

Т.к. получили уравнение в неявном виде, то это - общий интеграл д.у.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin x dx + \sqrt{y} dy &= 0, \int \sin x dx + \int \sqrt{y} dy = \int 0, \\ \int \sin x dx + \int \sqrt{y} dy &= c, \quad \int \sin x dx + \int y^{\frac{1}{2}} dy = c, \end{aligned}$$

$$-\cos x + \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = c, \quad -\cos x + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c,$$

$$\begin{aligned} -\cos x + (2/3)\sqrt{y^3} &= c, \quad (2/3)\sqrt{y^3} = c + \cos x, \\ (4/9)y^3 &= (c + \cos x)^2 \end{aligned}$$

$$\text{или } y = \sqrt[3]{(9/4) \cdot (c + \cos x)^2}, \quad y = \sqrt[3]{(9 \cdot (c + \cos x)^2) / 4}$$

Путем алгебраических преобразований приводим функцию к явному виду и получаем общее решение д.у.

3.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0 \quad (2)$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Поделив обе части уравнения на $(1 + x^2)(y + 3)$, получим уравнение с разделенными

переменными $\frac{dy}{y + 3} - \frac{2x}{1 + x^2} dx = 0$

Интегрируя, имеем:

$$\int \frac{dy}{y + 3} - \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = 0,$$

$$\ln|y + 3| - \ln|1 + x^2| = C.$$

Для придания более простого вида полученному результату заменим произвольную постоянную C на $\ln C$. (Это возможно в силу произвольности C). Тогда имеем

$$\ln|y + 3| - \ln|1 + x^2| = \ln|C|$$

Потенцируя, получим $\frac{y+3}{1+x^2} = C$, или

$$y+3 = C(1+x^2)$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Пример. Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)\operatorname{ctg} x$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на множитель $(y+1)$. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y+1} = \operatorname{ctg} x dx$$

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в виде $\ln C$, получим

$$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln C$$

Потенцируя, находим общее решение:
 $y = C \sin x - 1$

Найдем значение C , соответствующее

начальным условиями: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $2 = C \sin \frac{\pi}{2} - 1$, откуда $C = 3$. Подставим $C = 3$ в формулу общего решения. Получим, $y = 3 \sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

3.3. Однородные уравнения I-го порядка

Определение. Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одного измерения. Функция $F(x, y)$ называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Оно приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right) = u$ или $y = ux$, $(y' = u'v + uv')$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции u .

При этом $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, или $dy = xdu + udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя

затем $u = \left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение. Здесь $P = x^2 + 2xy$, $Q = xy$.
Функции однородные второго измерения.
Введем подставку $y = ux$, тогда $dy = xdu + udx$.

Данное уравнение примет вид:
 $(x^2 + 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0$, или
 $(x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{(u+1)^2} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{(u+1)^2} = C,$$

$$\ln|x| + \int \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du = C, \quad \ln|x| + \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = C$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции

y заменой " u " на $\frac{y}{x}$, получаем

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = C, \quad \ln\left|x\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right| + \frac{x}{x + y} = C.$$

Пример. Проинтегрировать уравнение
 $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$

Решение. Вначале устанавливаем, что данное уравнение - однородное:

$$y' = \frac{y}{x} (1 - \ln \frac{x}{y}) = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

затем заменяем функцию y . Полагая $y = ux$, получим уравнение с разделяющимися

переменными $u + x \frac{dx}{du} = u(1 + \ln u)$ или

$$x \frac{dx}{du} = u \ln u.$$

Умножая обе его части на $\frac{dx}{xu \ln u}$ разделим

переменные $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$ и интегрируем:

$$\int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C.$$

Потенцируя и исключая вспомогательную переменную " u ", найдем искомый общий интеграл $|\ln u| = C|x|$; $u = e^{ax}$; $y = xe^{ax}$.

3.4. Линейные уравнения I-го порядка

Определение. Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y' .

Общий вид линейного уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

(1).

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v , т.е. положить $y = uv$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \text{ и данное уравнение (1) примет}$$

$$\text{вид } v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + P(x)v \right] = Q(x) \quad (2)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например v можно выбрать произвольно, подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т.е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v = v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

Подставляя выражение $v = v(x)$ в уравнение (2), получаем уравнение относительно функции u :

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad (3)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Найдя общее решение уравнения (3) в виде $u = u(x, C)$ получив общее решение линейного уравнения (1):

$$y = u(x, C) \cdot v(x)$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = 2x \sec x$

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и её производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где u и v - некоторые неизвестные функции аргумента x . Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид $u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = 2x \sec x$ или $u(v' - v \operatorname{tg} x) + u'v = 2x \sec x$ (1)

Так как искомая функция представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части

равенства (1), обращалось в нуль, т.е. выберем функцию v так, чтобы имело место равенство

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0 \quad (2)$$

При таком выборе функции уравнение (1) примет вид

$$u'v = 2x \sec x \quad (3)$$

Уравнение (2) есть уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x .

Решим это уравнение

$$\frac{dv}{dx} - v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x, \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx, \quad \ln v = -\ln \cos x, \quad v = \frac{1}{\cos x}$$

(Чтобы равенство (2) имело место, достаточно найти одно какое-либо частное решение, удовлетворяющее этому уравнению. Поэтому для простоты при интегрировании этого уравнения находим то частное решение, которое соответствует значению произвольной постоянной $C = 0$). Подставив в (3) найденное

выражение для v , получим: $\frac{u'}{\cos x} = \frac{2x}{\cos x},$

$u' = 2x, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx.$ Интегрируя, получаем $u = x^2 + C$

Тогда $y = (x^2 + C) \cdot \frac{1}{\cos x}$ - общее решение данного уравнения.

3.5. Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где P и Q функции, зависящие только от x и n -рациональное число, называется уравнением Бернулли.

При $n=0$ имеем линейное уравнение. Уравнение Бернулли решается также подстановкой $y=uv$.

Пример. Найти общий интеграл уравнения:
 $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$

Разделив обе части уравнения на $x^2 y^2$, убеждаемся, что данное уравнение является уравнением Бернулли: $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x^2}$

Заменяя функцию y по формуле $y=uv$, имеем
 $y' = (uv)' = u'v + uv'$, $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$ или

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

Отсюда получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) \left(v' + \frac{v}{x}\right) = 0 \text{ и} \quad 2) u'v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого

уравнения: $v = \frac{1}{x}$. Подставляя v во второе

уравнение и решая его, находим u как общий

интеграл этого уравнения: $\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}$, $u^2 du = x dx$,

$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}$, $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$. Следовательно,

искомый общий интеграл данного уравнения

$$y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$$

§4. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного

Используем формулы:

$$d(xy) = xdy + ydx \quad (1)$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-xdy + ydx}{y^2} \quad (2)$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad (3)$$

Такие уравнения иногда легко решаются, если

соответственно положить $xy = u$ или $\frac{y}{x} = u$,
 $y = ux$

Пример. $x^2 dy + xy dx = dx$

Запишем $x(xdy + ydx) = dx$ или $xd(xy) = dx$.

Пусть $xy = u$, тогда $xdu = dx$, $du = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем последнее выражение

$$\int du = \int \frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + \ln|c|, \quad u = \ln|xc|,$$

$$xy = \ln|xc|, \quad y = \frac{\ln|cx|}{x} \quad - \quad \text{общее решение}$$

исходного уравнения.

Замечание: уравнение $x^2 dy + xy dx = dx$ можно привести к виду $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ и решить как линейное.

Пример. $x^2 y^2 + 1 + x^3 yy' = 0$, начальные условия $x=1$, $y=2$.

$$x(xy^2 + x^2 yy') = -1,$$

$$\frac{x(xy^2 dx + x^2 y dy)}{dx} = -1, \quad xy^2 dx + x^2 y dy = -\frac{dx}{x}.$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$2xy^2 dx + 2x^2 y dy = -\frac{2dx}{x}.$$

Используя формулу (1) запишем:

$$y^2 d(x^2) + x^2 d(y^2) = d(x^2 y^2), \quad \text{тогда}$$

уравнение примет вид: $d(x^2 y^2) = -2d(\ln|x|)$.

Проинтегрируем $\int d(x^2 y^2) = -2 \int d(\ln|x|)$ или
 $x^2 y^2 = -2 \ln|x| + c$, $x^2 y^2 + 2 \ln|x| = c$ - общий
интеграл уравнения.

Подставив в общее решение начальные условия $x=1$, $y=2$ получим $4 + ((2 \ln 1)/0) = c$, $c=4$ следовательно частный интеграл уравнения запишется $x^2 y^2 + 2 \ln|x| = 4$.